

## Série fonctions trigonométriques

Mr Masmoudi Radhouane

### Exercice 1 :

Calculer les limites éventuelles suivantes :

$$\begin{array}{lll}
 (1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\tan 3x)^2}{1 - \cos x} & (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \tan x - x}{\sin x} & (3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{x^3} \\
 (4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos x}{x^2} & (5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \left( \frac{2}{\cos x} + \cos x - 3 \right) & \\
 (6) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x - 1}{\cos 2x} & (7) \lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) \tan\left(\frac{\pi}{2}x\right) & (8) \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} (1 + \sin x) \tan^2 x \\
 (9) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin 3x}{1 - \cos x} & (10) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - 2 \sin^2 x}{1 + \cos 4x} & 
 \end{array}$$

### Exercice 2 :

Soit  $f(x) = \cos^2 3x - \sin^2 x$  et  $g(x) = 2 \cos x - 2 \cos^3 x$ .

- 1) Montrer que  $f$  et  $g$  sont dérivables sur  $\mathbb{R}$  et calculer  $f'(x)$  et  $g'(x)$ .
- 2) Calculer  $g(\pi - x)$ . Que peut-on conclure.
- 3) Montrer qu'on peut étudier  $g$  sur  $\left] 0, \frac{\pi}{2} \right]$ .
- 4) Calculer  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{f(x) + g(x) - 1}{\pi - 3x}$ .

### Exercice 3 :

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$  par :  $f(x) = \frac{\tan x - \sin x}{x^2}$ , si  $x \neq 0$  et  $f(0) = 0$ .

- 1) Etudier la continuité et la dérivabilité de  $f$  en 0.
- 2) Etudier la parité de  $f$ .
- 3) Montrer que  $f$  est dérivable sur  $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[ \setminus \{0\}$  et calculer sa dérivée.

### Exercice 4 :

On considère la fonction  $f$  définie par :  $f(x) = \sin 2x - 2 \cos x$  et on note  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  (unité 2 cm).

1) Comparer  $f(\pi - x)$  et  $f(x)$  puis montrer qu'on peut étudier  $f$  sur  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ .

2) Etudier  $f$  et représenter la partie de  $\mathcal{C}_0$  de  $\mathcal{C}$  sur  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ .

3) Soit  $g$  la fonction définie sur  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$  par : 
$$\begin{cases} g(x) = \frac{2 \cos^3 x}{1 + \sin x}, \text{ si } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ g\left(\frac{-\pi}{2}\right) = g\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

a) Montrer que  $g$  est continue sur  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ .

b) Etudier la dérivabilité de  $g$ .

c) Montrer que pour tout  $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$   $g(x) = -f(x)$  puis construire  $\mathcal{C}_g$ .

### Exercice 5 :

Soit  $f$  la fonction définie par :  $f(x) = \frac{\cos x}{\cos 2x}$  et on note  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1) Montrer que le point  $A\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$  est un centre de symétrie de  $\mathcal{C}$ .

2) Montrer que  $f$  est dérivable sur son ensemble de définition et que :

$$f'(x) = \frac{\sin x(1 + 2 \cos^2 x)}{\cos^2(2x)}.$$

3) Montrer qu'il suffit d'étudier  $f$  sur  $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[ \cap D_f$ .

4) Etudier  $f$  et tracer la partie de  $\mathcal{C}$  dans  $[-\pi, \pi]$ .

5) Déterminer les équations des tangentes à  $\mathcal{C}$  aux points d'ordonnées 1.

### Exercice 6 :

Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = 2 \cos^2 x - 2\sqrt{3} \sin x \cos x$ .

1) Montrer que pour tout réel  $x$ ,  $f(x) = 2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + 1$ .

- 2) Montrer que pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ , la droite  $\Delta_k : x = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}$  est un axe de symétrie de  $\mathcal{C}_f$
- puis montrer qu'il suffit d'étudier  $f$  sur  $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$ .
- 3) Etudier  $f$  et tracer la partie de  $\mathcal{C}_f$  dans  $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$ .
- 4) Soit  $g(x) = \frac{f(x) - 1}{\sqrt{3} \cos 2x + \sin 2x}$ ,  $x \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$ . Préciser  $D_g$  puis étudier  $g$  et tracer sa courbe  $\mathcal{C}_g$  dans un nouveau repère orthonormé.